

۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{\frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}} < 1 \rightarrow \frac{|x|}{|2x+1|} < 1 \rightarrow |x| < |2x+1|$$

(همگرایی با آزمون کوشی: بدست آوردن بازه

$$x^2 < 4x^2 + 4x + 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 > 0 \xrightarrow{\Delta=4} x_1, x_2 = \frac{-4 \pm 2}{6} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

تعیین علامت: $x < -1, x > -\frac{1}{3}$

شرط لازم را ندارد پس واگراست $\rightarrow x = -1 \rightarrow \sum \frac{n}{n+1}$

شرط لازم را ندارد پس واگراست $\rightarrow x = -\frac{1}{3} \rightarrow \sum \frac{(-1)^n n}{n+1}$

بررسی نقاط مرزی:

۲- گزینه ۲ درست است.

مسئله بهینه سازی و هدف ماکزیمم کردن حجم با شرط ثابت بودن مساحت کل است.

تابع هدف: $\text{Max}(V) = \pi r^2 h$

تابع کمکی: $2\pi r^2 + 2\pi rh = A \Rightarrow h = \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{A}{2\pi r} - r$

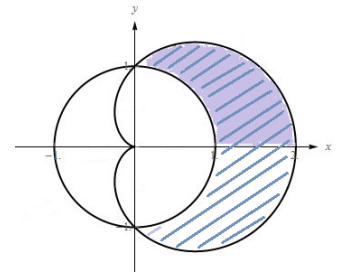
اصلاح تابع هدف: $V(r) = \pi r^2 \left(\frac{A}{2\pi r} - r \right) = \pi \left(\frac{Ar}{2} - r^3 \right)$

$$\begin{aligned} V'_r = 0 &\rightarrow \pi \left(\frac{A}{2} - 3r^2 \right) = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{A}{6\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \\ h &= \frac{A}{2\pi \sqrt{\frac{A}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \frac{\sqrt{6A}}{2\sqrt{\pi}} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \frac{\sqrt{6A} - 2\sqrt{A}}{2\sqrt{6}\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{6}\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

نسبت شعاع به ارتفاع: $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$

۳- گزینه ۴ صحیح است.

براساس مفهوم تقارن می‌توانیم مساحت بخش بالا را محاسبه کنیم و حاصل را دو برابر کنیم.



$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta = \frac{1}{2} \times 2 \int_0^{\pi} ((1 + \cos \theta)^2 - 1^2) d\theta = \int_0^{\pi} (\cos^2 \theta + 2 \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{4} + 2$$

۴- گزینه ۳ صحیح است.

هدف سوال اکسترمم سازی مطلق تابع مورد نظر تحت دو قید است که میتوان از ضریب لاگرانژ استفاده کرد. اما روش بهتر حل اینگونه سوالات مرتب سازی متغیرها برحسب هم و تبدیل تابع به تابعی با متغیرهای کمتر است.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{y+z=1-x} f &= x^2 + y + z = x^2 - x + 1 \\ \text{قید اول: } f'_x &= 0 \\ \xrightarrow{f'_x=0} 2x - 1 &= 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

در نقطه بحرانی تابع $x = \frac{1}{2}$ است که با جایگذاری در دو قید، y و z نقطه را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y + z = \frac{1}{2} \\ z^2 - y^2 = \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow z = 3y = -\frac{5}{2}$$

$$z^2 - y^2 = \frac{11}{4} \rightarrow (z - y)(z + y) = \frac{11}{4} \Rightarrow z - y = \frac{11}{2}$$

پس $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 3)$ بحرانی تابع تحت این دو قید است که مینیمم در این نقطه $\frac{3}{4}$ است.

۵- گزینه ۳ صحیح است.

برای محاسبه مساحت محصور به یک منحنی باید $(S = \int y \, dx)$ را محاسبه نماییم.

$$S = \int_0^{2\pi} (\sin t - \sin(2t))(-\sin t + \sin(2t)) \, dt$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - \sin^2 2t + 2 \sin t \sin 2t \right) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2t - \cos 4t)$$

$$S = -\sin^2 t - \sin^2 2t + 2 \sin t \sin 2t$$

$$= -\sin^2 t - \sin^2 2t + 2 \sin t \sin 2t$$

$$S = -\sin^2 t - \sin^2 2t + 2 \sin t \sin 2t$$

$$= -\sin^2 t - \sin^2 2t + 2 \sin t \sin 2t$$